Документ создан на ресурсе

http://Web-tutor.narod.ru

Интернет-Репетитор по физико-математическим наукам.

С вопросами, задачами, тестами по любым разделам Математики и Физики обращайтесь к Интернет Репетитору:

© Курилин Александр Владимирович

E-mail: kurilin@inbox.ru

©Web-Tutor: **Качественное и быстрое решение задач любой сложности:**
http://Web-tutor.narod.ru

Вариант: 3 (Эконом.,1999)

1. Решить неравенство

$\log_{|x|-3}|x-4| \leqslant 0$

Ответ: $x \in (-4,-3) \cup (4,5]$

2. Решить неравенство

$9 \cdot \sqrt{\dfrac{3^x-1}{3^x}} - \sqrt{45} \leqslant 20 \cdot \sqrt{\dfrac{3^{x-4}}{3^x-1}}$

Ответ: $x \in (0,4]$

3. Первый и второй тракторы, работая вместе, могут вспахать поле не менее, чем за 24 часа. Первый и третий тракторы, работая вместе, могут вспахать то же поле не более, чем за 12 часов. Второй и третий тракторы, работая вместе, могут вспахать то же поле ровно за 16 часов. Известно, что второй трактор всегда работает с максимально возможной для него производительностью. За сколько часов может вспахать поле один первый трактор?

Ответ: 32 часа

4. В трапеции ***ABCD*** с основаниями ***AB*** = ***a***, ***CD*** =***b*** диагональ ***AC*** = ***c***. Найти площадь трапеции, если угол ***CAB*** равен удвоенному углу ***DBA***.

Ответ: $\dfrac{a+b}{4}\sqrt{(a+b+c)(3c-a-b)}$

5. Решить уравнение

$x+\dfrac{1}{7}\arccos(\cos 16x+2\sin 5x\cos 2x)=\dfrac{\pi}{14}$

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{38},\ x=\dfrac{\pi}{26}$

6. Дана треугольная пирамида ***SABC***. Точки ***A'***, ***B'***, ***C'*** являются серединами ребер ***AS***, ***BS***, ***CS*** соответственно. Найти объем пирамиды, если

$\angle SCA=\angle SCB=\alpha>\dfrac{\pi}{2},\ \angle ABC=\beta,\ B'C'=A'C'=SC'=a$

Ответ: $\dfrac{8a^3}{3}\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$

7. Найти все значения параметра ***b***, при каждом из которых система

$$\begin{cases} b\sin|2z|+\log_2\left(x\cdot\sqrt[6]{1-2x^6}\right)+b^2=0 \\ \left(y^2+y\sin 2z+(1-y^2)\sin^2 z\right)\cdot\left(1+\sqrt{\pi^2-4z^2}\right)=0 \end{cases}$$

разрешима и имеет не более двух решений и найти эти решения.

Ответ:

$b=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, решения $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{4}},\ 0,\ 0\right)$

$b=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, решения $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{4}},\ -1,\ \dfrac{\pi}{4}\right),\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{4}},\ 1,\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$

1 Решение задачи (Эконом.,1999, вариант: 3, задача: 1 из 7)

Так как логарифмическая функция при основании $0<|x|-3<1$ является монотонно убывающей, а при основании $|x|-3>1$ монотонно возрастающей, следует рассмотреть эти два случая:

$$\log_{|x|-3}|x-4|\leqslant 0=\log_{|x|-3}1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<|x|-3<1\\ |x-4|\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}|x|-3>1\\ 0<|x-4|\leqslant 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3<|x|<4\\ |x-4|\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}|x|>4\\ 0<|x-4|\leqslant 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4<x<-3\\ 4<x\leqslant 5\end{array}\right.$$

2 Решение задачи (Эконом.,1999, вариант: 3, задача: 2 из 7)

Исходное неравенство преобразуется к виду

$$9\cdot\sqrt{\frac{3^x-1}{3^x}}-\sqrt{45}\leqslant 20\cdot\sqrt{\frac{3^{x-4}}{3^x-1}} \Leftrightarrow 9\cdot\sqrt{\frac{3^x-1}{3^x}}-3\sqrt{5}\leqslant\frac{20}{9}\cdot\sqrt{\frac{3^x}{3^x-1}}$$

Сделаем замену $y=\sqrt{\frac{3^x-1}{3^x}}>0$

Умножая обе части неравенства на $y>0$, получим

$$\begin{cases}9y^2-3\sqrt{5}y-\frac{20}{9}\leqslant 0\\ y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9\left(y-\frac{4\sqrt{5}}{9}\right)\left(y+\frac{\sqrt{5}}{9}\right)\leqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow 0<y\leqslant\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$0<\sqrt{\frac{3^x-1}{3^x}}\leqslant\frac{4\sqrt{5}}{9} \Leftrightarrow \begin{cases}3^x-1>0\\ 3^x-1\leqslant\frac{80}{81}\cdot 3^x\end{cases} \Leftrightarrow 1<3^x\leqslant 81 \Leftrightarrow 0<x\leqslant 4$$

3 Решение задачи (Эконом.,1999, вариант: 3, задача: 3 из 7)

Пусть S (га) - площадь поля, x, y, z - производительности первого, второго и третьего тракторов соответственно, тогда

$$\frac{S}{x+y}\geqslant 24,\ \frac{S}{x+z}\leqslant 12,\ \frac{S}{y+z}=16$$

Выражая S из равенства и подставляя его в неравенства, получим

$$24(x+y)\leqslant 16(y+z)\leqslant 12(x+z) \Leftrightarrow \begin{cases}4y+z\leqslant 3x\leqslant 2z-y\\ 4y+z\leqslant 2z-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4y+z\leqslant 3x\leqslant 2z-y\\ y\leqslant\frac{1}{5}z\end{cases}$$

Производительность второго трактора ограничена сверху одной пятой производительности третьего. Из условия максимально возможной производительности второго трактора следует

$$\begin{cases}4y+z\leqslant 3x\leqslant 2z-y\\ y=\frac{1}{5}z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{4}{5}z+z\leqslant 3x\leqslant 2z-\frac{1}{5}z\\ y=\frac{1}{5}z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{9}{5}z\leqslant 3x\leqslant\frac{9}{5}z\\ y=\frac{1}{5}z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{3}{5}z\\ y=\frac{1}{5}z\end{cases}$$

Подставим полученный результат в исходное равенство

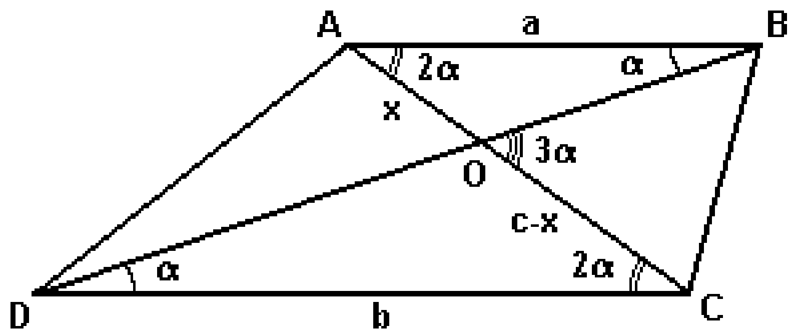
$$\frac{S}{y+z}=16 \Leftrightarrow \frac{5S}{6z}=16 \Leftrightarrow \frac{S}{z}=\frac{96}{5}$$

Теперь получаем то, что требовалось найти $\frac{S}{x}=\frac{5S}{3z}=\frac{5}{3}\cdot\frac{96}{5}=32$

4 Решение задачи (Эконом.,1999, вариант: 3, задача: 4 из 7)

Обозначим

$AO = x,\ \angle DBA = \alpha$



Из подобия треугольников AOB и DOC следует

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c-x} \Leftrightarrow a(c-x) = bx \Leftrightarrow x = \frac{ac}{a+b}$$

Из теоремы синусов для треугольника AOB следует

$$\frac{a}{\sin(\pi - 3\alpha)} = \frac{ac}{(a+b)\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{c}{a+b} \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha} = \frac{c}{a+b}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\left(\cos 2\alpha + 2\cos^2\alpha\right)\sin\alpha} = \frac{c}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{2\cos 2\alpha + 1} = \frac{c}{a+b} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{a+b-c}{2c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{a+b-c}{2c}\right)^2} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(3c-a-b)}}{2c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}ac\sin 2\alpha + \frac{1}{2}bc\sin 2\alpha = \frac{a+b}{4}\sqrt{(a+b+c)(3c-a-b)}$$

5 Решение задачи (Эконом.,1999, вариант: 3, задача: 5 из 7)

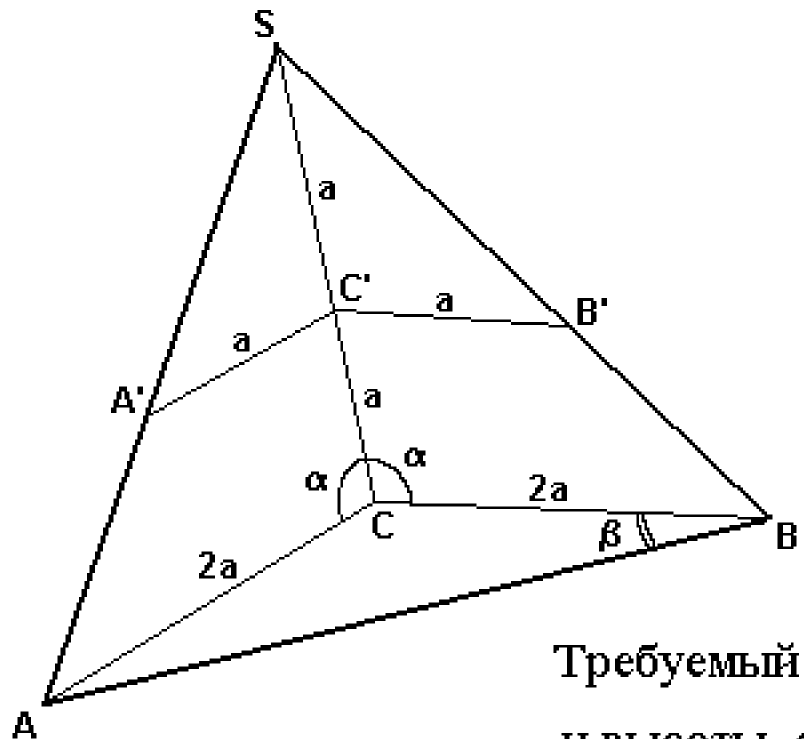
$$x + \frac{1}{7}\arccos\left(\cos 16x + 2\sin 5x\cos 2x\right) = \frac{\pi}{14} \Leftrightarrow \arccos\left(\cos 16x + \sin 7x + \sin 3x\right) = \frac{\pi}{2} - 7x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 16x + \sin 7x + \sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) \\ 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - 7x \leqslant \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 16x + \sin 3x = 0 \\ 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - 7x \leqslant \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 16x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0 \\ 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - 7x \leqslant \pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\left(\frac{13x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{19x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ -\frac{\pi}{14} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{13x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{19x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right. \\ -\frac{\pi}{14} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{14} \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{26} + \frac{2\pi n}{13},\ \forall n \in Z \\ x = \frac{3\pi}{38} + \frac{2\pi m}{19},\ \forall m \in Z \end{array}\right. \\ -\frac{\pi}{14} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{26} \\ x = -\frac{\pi}{38} \end{array}\right.$$

6 **Решение задачи** (Эконом.,1999, вариант: 3, задача: 6 из 7)

Из условия задачи следует, что $CA = CB = CS = 2a$. Из этого вытекает, что вершина C заданной пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около треугольника ABS.



Найдем длины сторон треугольника ABS:

$$AS = BS = 4a\sin\frac{\alpha}{2},\ AB = 4a\cos\beta$$

Требуемый обьем найдем как треть произведения площади треугольника ABS и высоты, опущенной из вершины C:

$$S_{ABS} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot\sqrt{AS^2 - \frac{1}{4}\cdot AB^2} = \frac{1}{2}\cdot 4a\cos\beta\cdot\sqrt{16a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\cdot 16a^2\cos^2\beta} =$$

$$= 4a^2\cos\beta\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}$$

$$R_{ABS} = \frac{AS\cdot BS\cdot AB}{4S_{ABS}} = \frac{16a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot 4a\cos\beta}{16a^2\cos\beta\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}} = \frac{4a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}}$$

$$H_C = \sqrt{4a^2 - R_{ABS}^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{16a^2\sin^4\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}} = \sqrt{\frac{16a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 4a^2\cos^2\beta - 16a^2\sin^4\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}} =$$

$$= \frac{2a\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\beta}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}} = \frac{2a\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}}$$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABS}H_C = \frac{1}{3}\cdot 4a^2\cos\beta\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}\cdot\frac{2a\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}} = \frac{8}{3}\cdot a^3\cos\beta\cdot\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}$$

$$V = \frac{8}{3}\cdot a^3\cos\beta\cdot\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}$$

7 Решение задачи (Эконом.,1999, вариант: 3, задача: 7 из 7)

Преобразуем первое уравнение системы:

$$b|\sin z| + \log_2\left(x\sqrt[6]{1-2x^6}\right) + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + b|\sin z| + \frac{1}{6}\log_2\left(x^6\left(1-2x^6\right)\right) = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение. Выражение во вторых скобках всегда положительно, поэтому оно дает только ограничение на z:

$$\left(y^2 + y\sin 2z + \left(1-y^2\right)\sin^2 z\right)\left(1 + \sqrt{\pi^2 - 4z^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1-\sin^2 z\right)y^2 + y\sin 2z + \sin^2 z = 0 \\ \pi^2 - 4z^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2\cos^2 z + 2y\sin z\cos z + \sin^2 z = 0 \\ z^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(y\cos z + \sin z\right)^2 = 0 \\ |z| \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\cos z + \sin z = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Таким образом исходная система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} b^2 + b|\sin z| + \frac{1}{6}\log_2\left(x^6\left(1-2x^6\right)\right) = 0 \\ x > 0 \\ y\cos z + \sin z = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Рассмотрим выражение под знаком логарифма.

Если число x является решением уравнения

$$x^6\left(1-2x^6\right) = a \Leftrightarrow -2\left(x^6\right)^2 + x^6 - a = 0$$

то по теореме Виета сумма шестых степеней его корней равна 1/2 и вторым корнем этого уравнения является число $\sqrt[6]{\frac{1}{2} - x^6}$ Таким образом, если тройка чисел (x,y,z) является решением системы, то каждая из следующих троек $(x,-y,-z)$, $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}-x^6}, y, z\right)$, $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}-x^6}, -y, -z\right)$

также является решением системы. Если система имеет единственное решение, то все четыре тройки совпадают:

$$\begin{cases} x = \sqrt[6]{\frac{1}{2} - x^6} \\ y = -y \\ z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[6]{4}} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Обратное необязательно верно, поэтому следует проанализировать количество решений при обоих значениях b:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|\sin z| + \log_2\left(x\sqrt[6]{1-2x^6}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

Так как неравенства $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}|\sin z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\log_2\left(x\sqrt[6]{1-2x^6}\right) \leqslant 0$

выполняются независимо друг от друга, то уравнение, а значит и система, имеют бесконечное количество решений.

$$b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}|\sin 2z| + \log_2\left(x\sqrt[6]{1-2x^6}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

Так как неравенства $-\frac{1}{\sqrt{2}}|\sin 2z| \leqslant 0$, $\log_2\left(x\sqrt[6]{1-2x^6}\right) \leqslant 0$

выполняются независисмо друга, то так как сумма двух неположительных слагаемых равна нулю только в случае когда оба слагаемых равны нулю, то в данном случае система имеет единственное решение. Если система имеет два решения, то среди вышеуказанных четырех троек решений две должны попарно совпадать. Возможны два варианта: первая тройка совпадает со второй, третья с четвертой, либо первая совпадает с третьей, вторая с четвертой. Рассмотрим эти варианты:

Рассмотрим эти варианты:

$$\begin{cases} x \neq \sqrt[6]{\dfrac{1}{2} - x^6} \\ y = -y \\ z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{1}{\sqrt[6]{4}} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow b^2 + \log_2\left(x\sqrt[6]{1 - 2x^6}\right) = 0 \Rightarrow b^2 > \frac{1}{2}$$

Последнее уравнение имеет два решения при указаных ***b***, однако легко убедиться, что система имеет бесконечное количество решений.

$$\begin{cases} x = \sqrt[6]{\dfrac{1}{2} - x^6} \\ y \neq -y \\ z \neq -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[6]{4}} \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \Rightarrow |\sin 2z| = \frac{1}{2b} - b$$

Это уравнение имеет два решения только если $\dfrac{1}{2b} - b = 1 \Leftrightarrow b = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2},\ z = \pm\dfrac{\pi}{4}$

При других значениях ***b*** это уравнение, а также и исходная система, либо не будет иметь решений, либо будет иметь одно решение, либо больше двух решений. Проанализируем количество решений при найденных значениях ***b***:

$$b = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}|\sin 2z| + \log_2\left(x\sqrt[6]{1 - 2x^6}\right) = 0$$

Так как неравенства $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}|\sin 2z| \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\log_2\left(x\sqrt[6]{1 - 2x^6}\right) \leqslant -\dfrac{1}{2}$

выполняются независимо друг от друга, то уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}|\sin 2z| = \frac{1}{2},\ \log_2\left(x\sqrt[6]{1 - 2x^6}\right) = -\frac{1}{2}$$

В этом случае система имеет два решения

$$\left(\frac{1}{\sqrt[6]{4}}, -1, \frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt[6]{4}}, 1, -\frac{\pi}{4}\right)$$

При другом значении ***b*** аналогично можно убедиться, что система имеет бесконечное количество решений.