Вариант №1

1. Вычислить:

$$\log_{\left(b^3\sqrt[7]{a^5}\right)}\left(\frac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}}\right) \qquad \text{если} \qquad \log_b a = \sqrt{3}\,.$$

2. Решить неравенство:

$$\left|x^2+x-2\right|+\left|x+4\right| \le x^2+2x+6\,.$$

3. Решить уравнение:

$$\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\cdot\sin x\left(\cos x-\frac{2}{3}\right).$$

4. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC (C – вершина прямого угла). Все боковые грани пирамиды наклонены к ее основанию под одинаковым углом, синус которого равен – 5/13. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если SO – высота пирамиды, $AO = 1$, $BO = 3\sqrt{2}$.

5. Найти все решения системы:

$$\begin{cases} \cos 10x - 2\sin 5x \ge 3\cdot 4^y - 3\cdot 2^{y+2} + \dfrac{27}{2} \\ \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^{4y}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{4y}+2} + 14\cdot\log_2\left(\cos 10x\right) + 6\cos 5x \ge \left(2y+1\right)^{3/2} \end{cases}$$

О Т В Е Т Ы

1. $\dfrac{2\sqrt{3}-21}{42+10\sqrt{3}}$

2. $x \in [-6; -1] \cup [0; +\infty)$.

3. $x_1 = \pi n, \quad x_2 = -\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi k, \quad n, k \in Z$

4. $S_{\text{бок}} = 91/25$.

5. $x = -\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2\pi n}{5}, \quad y = 1, \quad n \in Z$.

① Решение задачи (Биол.,1998, вариант: 1, задача: 1 из 5)

$$\log_{\left(b^3\cdot\sqrt[7]{a^5}\right)}\left(\frac{\sqrt[7]{a}}{b\cdot\sqrt{b}}\right)=\frac{\log_b\left(\sqrt[7]{a}/\left(b\sqrt{b}\right)\right)}{\log_b\left(b^3\cdot\sqrt[7]{a^5}\right)}=\frac{\frac{1}{7}\log_b a-\frac{3}{2}}{3+\frac{5}{7}\log_b a}=\frac{\frac{1}{7}\sqrt{3}-\frac{3}{2}}{3+\frac{5}{7}\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-21}{42+10\sqrt{3}}$$

② Решение задачи (Биол.,1998, вариант: 1, задача: 2 из 5)

$$\left|x^2+x-2\right|+|x+4|\leqslant x^2+2x+6\Leftrightarrow\left|(x-1)(x+2)\right|+|x+4|\leqslant x^2+2x+6$$

Последнее неравенство эквивалентно совокупности четырех систем. Рассмотрим каждую по отдельности:

$$\begin{cases}x\leqslant-4\\x^2+x-2-x-4\leqslant x^2+2x+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant-4\\x\geqslant-6\end{cases}\Leftrightarrow-6\leqslant x\leqslant-4$$

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant-2\\x^2+x-2+x+4\leqslant x^2+2x+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant-2\\2\leqslant 6\end{cases}\Leftrightarrow-4\leqslant x\leqslant-2$$

$$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 1\\-x^2-x+2+x+4\leqslant x^2+2x+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 1\\2x^2+2x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 1\\\left[\begin{array}{l}x\leqslant-1\\x\geqslant 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\leqslant x\leqslant-1\\0\leqslant x\leqslant 1\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x\geqslant 1\\x^2+x-2+x+4\leqslant x^2+2x+6\end{cases}\Leftrightarrow x\geqslant 1$$

Собирая все вместе, получим $x\in[-6,-1]\cup[0,\infty)$

③ Решение задачи (Биол.,1998, вариант: 1, задача: 3 из 5)

$$\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\cdot\sin x\cdot\left(\cos x-\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow|\sin x|=\sin x\cdot\left(\cos x-\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow$$

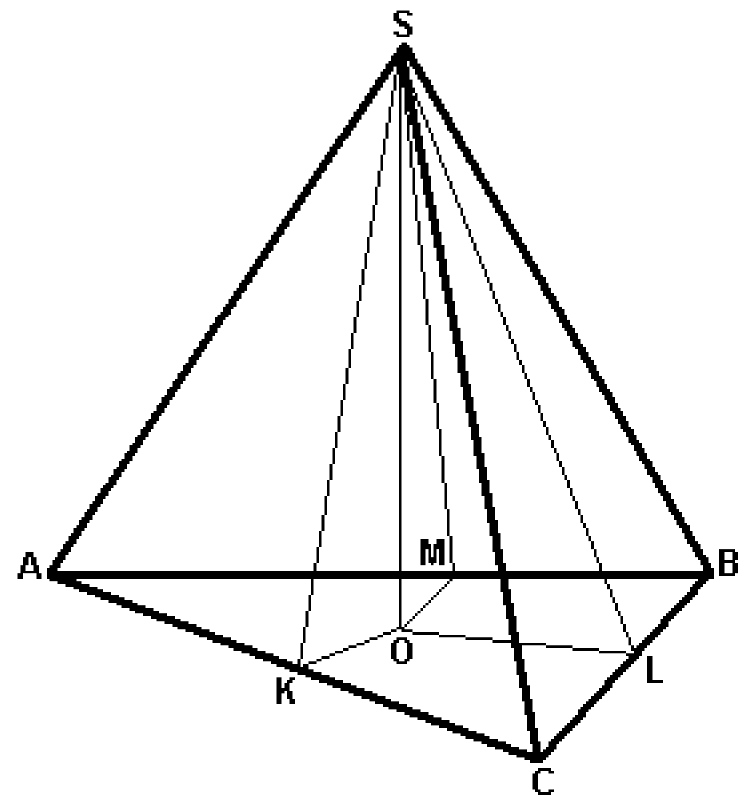
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x\geqslant 0\\\sin x=\sin x\cdot\left(\cos x-\frac{2}{3}\right)\end{cases}\\\begin{cases}\sin x<0\\-\sin x=\sin x\cdot\left(\cos x-\frac{2}{3}\right)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x\geqslant 0\\\sin x\cdot\left(\cos x-\frac{5}{3}\right)=0\end{cases}\\\begin{cases}\sin x<0\\\sin x\cdot\left(\cos x+\frac{1}{3}\right)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\\begin{cases}\sin x<0\\\cos x=-\frac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

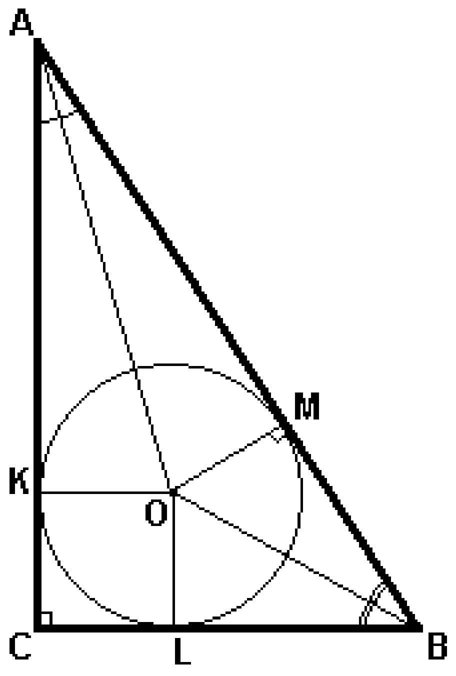
Получаем ответ

$$x=\pi n,$$

$$x=-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi k,$$

4 **Решение задачи** (Биол.,1998, вариант: 1, задача: 4 из 5)





Проведем высоты ***SK***, ***SL***, ***SM*** в треугольниках ***ASC***, ***CSB*** и ***ASB*** соответственно. По условию углы ***SKO***, ***SMO*** и ***SLO*** равны. Поэтому прямоугольные треугольники ***SOK***, ***SOM*** и ***SOL*** равны, откуда ***SL*** = ***SK*** = ***SM***, ***OK*** = ***OM*** = ***OL*** и точка ***O*** - центр вписанной в треугольник ***ABC*** окружности. Рассмотрим треугольник ***ABC***:

$$\angle AOB = \pi - \frac{1}{2}\left(\angle OAB + \angle OBA\right) = \pi - \frac{1}{2}\left(\angle CAB + \angle CBA\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Проведем высоты ***SK***, ***SL***, ***SM*** в треугольниках ***ASC***, ***CSB*** и ***ASB*** соответственно. По условию углы ***SKO***, ***SMO*** и ***SLO*** равны. Поэтому прямоугольные треугольники ***SOK***, ***SOM*** и ***SOL*** равны, откуда ***SL*** = ***SK*** = ***SM***, ***OK*** = ***OM*** = ***OL*** и точка ***O*** - центр вписанной в треугольник ***ABC*** окружности. Рассмотрим треугольник ***ABC***:

$$\angle AOB = \pi - \frac{1}{2}\left(\angle OAB + \angle OBA\right) = \pi - \frac{1}{2}\left(\angle CAB + \angle CBA\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Из треугольника ***AOB***:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos\angle AOB = 25 \Rightarrow AB = 5$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OM \Rightarrow OM = \frac{AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB}{AB} = \frac{3}{5}$$

Далее

$$AC + BC = KC + CL + KA + LB = OL + OK + AM + MB = 2OM + AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABC} = 2AB + 2OM = \frac{56}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OM \Rightarrow OM = \frac{AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB}{AB} = \frac{3}{5}$$

Далее

$$AC + BC = KC + CL + KA + LB = OL + OK + AM + MB = 2OM + AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABC} = 2AB + 2OM = \frac{56}{5}$$

Из треугольника ***SKO***:

$$\cos\angle SKO = \sqrt{1 - \sin^2\angle SKO} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13} \Rightarrow SK = \frac{KO}{\cos\angle SKO} = \frac{13}{20}$$

Теперь вычисляем площадь боковой поверхности пирамиды ***SABC***

$$S_b = \frac{1}{2} \cdot P_{ABC} \cdot SK = \frac{91}{25}$$

5 Решение задачи

(Биол.,1998, вариант: 1, задача: 5 из 5)

Преобразуем первое неравенство системы

$$\cos 10x - 2\sin 5x \geqslant 3\cdot 4^y - 3\cdot 2^{y+2} + \frac{27}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(4^y - 4\cdot 2^y + 4\right) - 12 + \frac{27}{2} - \cos^2 5x + \sin^2 5x + 2\sin 5x \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(2^y - 2\right)^2 + \frac{3}{2} - 1 + 2\sin^2 5x + 2\sin 5x \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(2^y - 2\right)^2 + 2\left(\sin 5x + \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \sin 5x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 5x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \cos 10x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Подставляя полученные значения во второе неравенство, получаем

$$\cos 5x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)^2\right)^2} + 14\log_2\left(\frac{1}{2}\right) + 6\frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3} \geqslant 3\sqrt{3}$$

$$\cos 5x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)^2\right)^2} + 14\log_2\left(\frac{1}{2}\right) - 6\frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3\sqrt{3} \geqslant 3\sqrt{3}$$

Подставляя полученные значения во второе неравенство, получаем

$$\cos 5x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)^2\right)^2} + 14\log_2\left(\frac{1}{2}\right) + 6\frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3} \geqslant 3\sqrt{3}$$

$$\cos 5x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)^2\right)^2} + 14\log_2\left(\frac{1}{2}\right) - 6\frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3\sqrt{3} \geqslant 3\sqrt{3}$$

Таким образом, исходная система эквивалентна следующей

$$\begin{cases} y = 1 \\ \sin 5x = -\frac{1}{2} \\ \cos 5x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, \ n \in Z \end{cases}$$