© Курилин Александр Владимирович

E-mail: kurilin@inbox.ru

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Биологический факультет.
Вступительный экзамен по математике на Биофак МГУ–1997 год.

Вариант №1

1. Решить уравнение:

$$\log_3 x + \log_3 (x+1) = 1 .$$

2. Решить уравнение:

$$\sin 2x - \sin 4x = (\cos 2x + 1)\cos x .$$

3. Решить неравенство:

$$\sqrt{|1-8x|-2} \le x+1 .$$

4. В двух коробках лежат карандаши: в первой – красные, во второй – синие. Известно, что красных карандашей меньше, чем синих. Сорок процентов карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем половину из них составляли синие. После этого красных карандашей в первой коробке оказалось на 26 больше, чем во второй, а общее количество карандашей во второй коробке увеличилось по сравнению с первоначальным более, чем на 5%. Найти общее количество синих карандашей.

5. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность, проведенная через точки M, N и C, касается стороны AB, а ее радиус равен $\sqrt{2}$. Длина стороны AC равна 2. Найти синус угла $\angle ACB$.

6. Найти все решения системы:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{20}\left(\dfrac{x^2}{\sin x}\right)^2 - \dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{\sin x}} + 1 < 0 \\ \left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 \ge \dfrac{\pi}{24}\left(\dfrac{5\pi}{6} - x\right) \\ x^2 - \dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{\cos x}} + \dfrac{5}{4} < 0 \end{cases}$$

О Т В Е Т Ы

1. $x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

2. $x_1=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3},\quad x_2=(-1)^k\arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+\pi k,\quad n,k\in Z$.

3. $x\in\left[-5+\sqrt{23};\,-1/8\right]\cup\left[3/8;\,3-\sqrt{5}\right]\cup\left[3+\sqrt{5};\,+\infty\right)$.

4. 60 синих и 50 красных карандашей.

5. $\sin(\angle ACB)=\dfrac{1}{2}$.

6. $x\in\left[\dfrac{11\pi}{24};\,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1 Решение задачи (Биол.,1997, вариант: 1, задача: 1 из 6)

$$\log_3 x+\log_3(x+1)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)=3\\ x>0\\ x+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-3=0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

2 Решение задачи (Биол.,1997, вариант: 1, задача: 2 из 6)

$$\sin 2x-\sin 4x=(\cos 2x+1)\cdot\cos x \Leftrightarrow 2\sin(-x)\cos 3x=(\cos 2x+1)\cdot\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x(\cos 2x+2\sin x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ -\sin^2 x+\sin x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ \left(\sin x-\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(\sin x-\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ \sin x=\dfrac{1-\sqrt5}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3},\ n\in Z\\ x=(-1)^k\arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)+\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

3 Решение задачи (Биол.,1997, вариант: 1, задача: 3 из 6)

$$\sqrt{|1-8x|-2}\leqslant x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}|1-8x|-2\geqslant 0\\ |1-8x|-2\leqslant (x+1)^2\\ x\geqslant -1\end{cases}$$

Эта система эквивалентна совокупности двух систем. Рассмотрим каждую по отдельности:

$$\begin{cases}1-8x\geqslant 0\\ 1-8x-2\geqslant 0\\ 1-8x-2\leqslant x^2+2x+1\\ x\geqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leqslant \dfrac18\\ x\leqslant -\dfrac18\\ x^2+10x+2\geqslant 0\\ x\geqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leqslant -\dfrac18\\ \left(x-(-5+\sqrt{23})\right)\left(x-(-5-\sqrt{23})\right)\geqslant 0\\ x\geqslant -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\leqslant -\dfrac18\\ \left[\begin{array}{l}x\geqslant -5+\sqrt{23}\\ x\leqslant -5-\sqrt{23}\end{array}\right.\\ x\geqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left[-1,-\dfrac18\right]\\ x\geqslant -5+\sqrt{23}\end{cases}$$

Так как

$$-1<-5+\sqrt{23}\Leftarrow 4<\sqrt{23}\Leftarrow 16<23$$

$$-\frac18>-5+\sqrt{23}\Leftarrow 39>8\sqrt{23}\Leftarrow 1524>1472$$

то решение последней системы $x\in\left[-5+\sqrt{23},-\frac18\right]$

Вторая система имеет вид

$$\begin{cases}1-8x<0\\ -1+8x-2\geqslant 0\\ -1+8x-2\leqslant x^2+2x+1\\ x\geqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac18\\ x\geqslant \dfrac38\\ x^2-6x+4\geqslant 0\\ x\geqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant \dfrac38\\ \left(x-(3+\sqrt5)\right)\left(x-(3-\sqrt5)\right)\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant \dfrac38\\ \left[\begin{array}{l}x\leqslant 3-\sqrt5\\ x\geqslant 3+\sqrt5\end{array}\right.\end{cases}$$

Так как $3-\sqrt5>\frac38\Leftarrow 21>8\sqrt5\Leftarrow 441>320$ то решение последней системы

$$x\in\left[\frac38,3-\sqrt5\right]\cup\left[3+\sqrt5,\infty\right)$$

Объединяя решения, получаем

$$x\in\left[-5+\sqrt{23},-\frac18\right]\cup\left[\frac38,3-\sqrt5\right]\cup\left[3+\sqrt5,\infty\right)$$

④ Решение задачи (Биол.,1997, вариант: 1, задача: 4 из 6)

Пусть x и y - количество красных и синих карандашей соответственно. Тогда $x < y$. После первого перекладывания в 1-ой и 2-ой коробках оказалось соответственно $0.6x$ и $y+0.4x$ карандашей. После второго перекладывания во 2-ой коробке осталось $0.8y+0.32x$ карандашей, из них $0.36x-0.1y$ красных. А в первой коробке оказалось $0.64+0.1y$ красных карандашей. По условию задачи

$$0.64x+0.1y=0.36x-0.1y+26 \Rightarrow y=130-\frac{7}{5}x$$

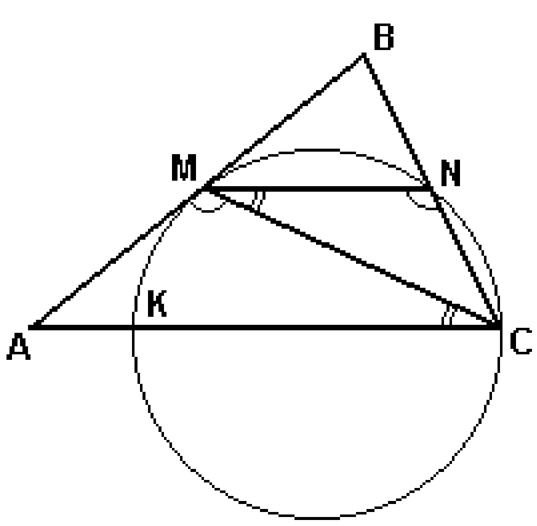
Следовательно x делится на 5. Решим неравенство $y < x$:

$$130-\frac{7}{5}x > x \Leftrightarrow \frac{12}{5}x < 130 \Leftrightarrow x < \frac{650}{12} \Rightarrow x < 55$$

Из условия на общее число карандашей во 2-ой коробке

$$0.8y+0.32x > 1.05y \Rightarrow 67x > 3250 \Rightarrow x > \frac{3250}{67} > 48$$

Так как x делится на 5, то $x = 50$ и $y = 60$.



⑤ Решение задачи

(Биол.,1997, вариант: 1, задача: 5 из 6)

Углы AMC и MNC равны половине дуги MKC. Углы CMN и ACM равны, как внутренние накрест лежащие при параллельных AC и MN. Поэтому треугольники AMC и CNM подобны. Кроме того $MN = AC/2 = 1$.

$$\frac{AC}{MC}=\frac{MC}{MN} \Rightarrow MC=\sqrt{2}$$

$$\frac{MC}{\sin\angle ACN}=\frac{MC}{\sin\left(\pi-\angle ACN\right)}=\frac{MC}{\sin\angle MNC}=2R=2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\angle ACN=\frac{MC}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

(6) Решение задачи **(Биол.,1997, вариант: 1, задача: 6 из 6)**

$$\begin{cases} \frac{1}{20}\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)^2 - \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\sin x}} + 1 < 0 \\ \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 \geqslant \frac{\pi}{24}\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) \\ x^2 - \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{5}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{20\sin^2 x}\left(x^2\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{x\sin x}}\cdot x^2 + 1 < 0 \\ x^2 - \frac{5}{8}\pi x + \frac{11\pi^2}{144} \geqslant 0 \\ x^2 - \sqrt{\frac{x}{\cos x}}\cdot x + \frac{5}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0,\ \sin x > 0,\ \cos x > 0 \\ D_1 = \frac{1}{x\sin x} - 4\cdot\frac{1}{20\sin^2 x} > 0 \\ x^2 - \frac{5}{8}\pi x + \frac{11\pi^2}{144} \geqslant 0 \\ D_3 = \frac{x}{\cos x} - 4\cdot\frac{5}{4} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,\ \sin x > 0,\ \cos x > 0 \\ \sin x > \frac{x}{5} \\ \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{11\pi}{24}\right) \geqslant 0 \\ \cos x < \frac{x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos x < \frac{x}{5} \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant \frac{\pi}{6} \\ x \geqslant \frac{11\pi}{24} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \qquad x \in \left[\frac{11\pi}{24}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Докажем, что любое x из найденного промежутка удовлетворяет первому и третьему неравенствам исходной системы.

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{24} = \sin\frac{11\pi}{24} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{24} = \sin\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \qquad x \in \left[\frac{11\pi}{24}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x^2 - \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{5}{4} \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{11\pi}{24}\right)^{3/2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} + 1.25 \leqslant$$

$$\leqslant (1.6)^2 - \frac{33}{24}\sqrt{\frac{33\cdot 2}{24\sqrt{2-\sqrt{3.7}}}} + 1.25 \leqslant 2.56 - \frac{11}{8\cdot 2}\sqrt{\frac{11}{\sqrt{2-1.9}}} + 1.25 \leqslant$$

$$\leqslant 3.81 - \frac{11}{16}\sqrt{\frac{11}{0.32}} \leqslant 3.81 - \frac{11}{16\cdot 0.4}\sqrt{5.5} \leqslant 3.81 - \frac{11}{64}\cdot 2.3 \leqslant 3.81 - 1.7\cdot 2.3 < 0$$

Таким образом третье уравнение системы выполняется.

$$x \in \left[\frac{11\pi}{24}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \quad \frac{1}{20}\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)^2 - \frac{x^{3/2}}{\sqrt{\sin x}} + 1 \leqslant \frac{1}{20}\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{\left(\sin\frac{11\pi}{24}\right)^2} - \frac{\left(\frac{11\pi}{24}\right)^{3/2}}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}} + 1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{5}\cdot\frac{(1.6)^4}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \frac{33}{24}\sqrt{\frac{33}{24}} + 1 \leqslant \frac{1}{5}\cdot\frac{6.6}{2+\sqrt{3.7}} - \frac{11}{8}\sqrt{1.375} + 1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{5}\cdot\frac{6.6}{2+1.9} - \frac{11}{8}\cdot 1.1 + 1 \leqslant \frac{1}{5}\cdot\frac{2.2}{1.3} - 1.37\cdot 1.1 + 1 = \frac{22}{65} + 1 - 1.5 \leqslant 1.4 - 1.5 = -0.1 < 0$$

Таким образом, первое уравнение также удовлетворяется.