© Курилин Александр Владимирович

E-mail: kurilin@inbox.ru

Вариант №1 (июль 1995, отделение экономики)

1. Решить уравнение:

$$\sqrt{x+3} = 9 - x\,.$$

2. Решить уравнение:

$$\frac{\sin 3x}{2\cos 2x + 1} = 0\,.$$

3. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{3x-1}{3x+1}}\left(x - \frac{1}{3}\right) \geq 1\,.$$

4. В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. т. железной руды. В течение следующих нескольких лет годовая добыча руды увеличивалась на 25% по сравнению с каждым предыдущим годом, затем на протяжении последующих трёх лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объём добытой руды за всё время добычи составил 850 тыс. т. Сколько лет разрабатывалось месторождение?

5. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$, $\angle BAC = 30^o$, радиус описанной окружности равен 5. Найти сторону AC.

6. Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$$x - 2 = \sqrt{-2(p+2)x + 2}$$

имеет единственное решение.

Решение задачи №1.

$\sqrt{x+3} = 9 - x$	(1)	Решаем иррациональное уравнение.
$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (9-x)^2$	(2)	Возводим обе части уравнения (1) в квадрат и раскрываем скобки.
$x + 3 = 81 - 18x + x^2$	(3)	Переносим все слагаемые в правую часть формулы (3) и приводим подобные.
$81 - 18x + x^2 - x - 3 = 0$	(4)	Получаем стандартное квадратное уравнение, которое решаем через дискриминант – D.
$x^2 - 19x + 78 = 0$	(5)	$D = 19^2 - 4 \cdot 78 = 361 - 312 = 49$
$x_{1,2} = \dfrac{19 \pm 7}{2}$	(6)	Находим корни квадратного уравнения (5), среди которых присутствуют и корни уравнения (1).
$x_1 = 13 \qquad x_2 = 6$	(7)	**Но это еще не ответ!!!!**

Характерной особенностью всех иррациональных уравнений, которые решаются возведением в квадрат обеих частей, является появление так называемых побочных корней. Дело в том, что уравнение (5) является следствием уравнения (1), но не эквивалентно ему. Среди корней уравнения (5) могут присутствовать и корни другого сопряженного уравнения, отличающегося от уравнения (1) только знаком правой части:

$$\sqrt{x+3} = x - 9 \tag{8}$$

После возведение в квадрат обеих частей уравнения (8) мы опять цепочку получаем уравнений (2), (3), (4), (5). Следовательно, среди корней уравнения (5) присутствуют как корни уравнения (1), так и корни уравнения (8). Чтобы отличить корни нашего уравнения (1) от корней побочного уравнения (8) можно просто сделать проверку подстановкой найденных решений x_1, x_2 (7) в уравнение (1). Однако этот способ отсечения побочных корней удобен в применении, только в том случае, если получены целые корни. Более эффективен метод дополнительных условий, которые накладываются на искомые решения.

Так как в левой части уравнения (1) стоит арифметический квадратный корень, который может принимать только неотрицательные значения, то и правая часть уравнения (1) должна быть неотрицательной. Это дает нам дополнительное условие, которому должны удовлетворять корни уравнения (1):

$$9 - x \geq 0 \qquad \text{или} \qquad x \leq 9 \tag{9}$$

Таким образом, уравнение (1) будет эквивалентно уравнению (5), только при наличии дополнительного условия (9). Легко увидеть, что корень $x_1 = 13$ не удовлетворяет условию (9), следовательно, он является побочным корнем!

$$\boxed{\text{О Т В Е Т :} \quad x = 6}$$

Решение задачи №2.

$$\frac{\sin 3x}{2\cos 2x + 1} = 0 \qquad (1)$$

Решаем тригонометрическое уравнение. Данное уравнение эквивалентно системе.

$$\begin{cases} \sin 3x = 0 \\ 2\cos 2x + 1 \neq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Дробь равна нулю в том случае, если числитель дроби равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\sin 3x = 0 \quad \Rightarrow$$
$$3x = \pi\, n_1, \qquad n_1 \in Z \qquad (3)$$

Первое уравнение системы (2) имеет простые решения, которые нумеруются некоторым целым числом n_1=.0, ±1, ±2, ±3, …

$$\cos 2x \neq -1/2 \quad \Rightarrow$$
$$2x \neq \pm\, 2\pi/3 + 2\pi\, n_2, \quad n_2 \in Z \qquad (4)$$

Второе уравнение системы (2) эквивалентно некоторому дополнительному условию, которому должны удовлетворять решения (3). Здесь n_2=.0, ±1, ±2, ±3, …– также целое число.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} n_1 \\ x \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n_2 \end{cases} \qquad n_1; n_2 \in Z \qquad (5)$$

Таким образом, решения уравнения (1) нужно искать среди точек единичной окружности, удовлетворяющих системе (5). Первые точки обозначим на окружности красным цветом, а вторые точки – синим.

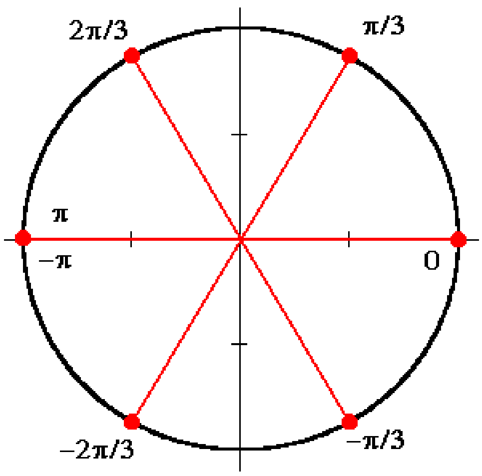


Рис.1

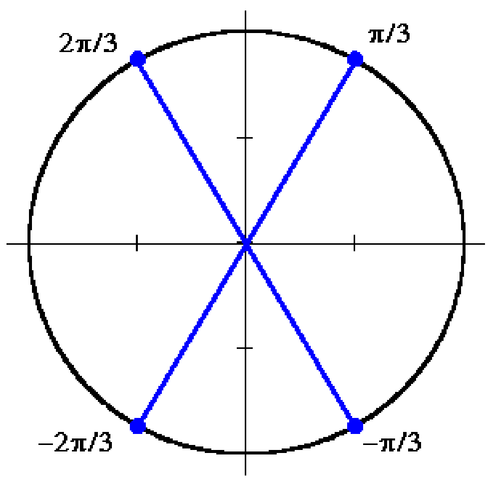


Рис.2

Решение задачи будет состоять из всех точек единичной окружности, которые находятся на первом рисунке, но не принадлежат второму рисунку. Оставшиеся точки на окружности имеют общее название $x = \pi\, n$, где $n \in Z$. Именно эти точки являются решениями уравнения (1). Более формальный способ получения этого ответа состоит в том, что семейство решений первого уравнения (3) разбивается на три подмножества решений по правилу: $n_1 = 3n$, $n_1 = 3n - 1$, $n_1 = 3n + 1$, где $n \in Z$. Из этих трех подмножеств только первое удовлетворяет условию (4) и именно оно является решением задачи.

О Т В Е Т : $\quad x = \pi\, n, \; n \in Z.$

Решение задачи №3.

(1) $$\log_{\frac{3x-1}{3x+1}}\left(x-\frac{1}{3}\right)\geq 1$$

Для решения указанного неравенства обозначим основание логарифма буквой a и найдем область допустимых значений (ОДЗ) переменной x, входящей в него.

(2) $$\begin{cases}\left(x-\frac{1}{3}\right)>0\\ \frac{3x-1}{3x+1}>0\\ a=\frac{3x-1}{3x+1}\neq 1\end{cases}$$

Согласно свойствам логарифмической функции $y = \log_a(X)$ выражение, стоящее под знаком логарифма, а также основание логарифма a должны быть числами положительными. Кроме того, основание логарифма не может быть равно 1. Последнее неравенство системы выполнено для любых значений переменной x, а первые два неравенства сводятся к системе (3).

(3) $$\begin{cases}x>1/3\\ x>-1/3\end{cases}$$

Таким образом, ОДЗ неравенства (1) состоит из множества точек, $x > 1/3$, или $x\in (1/3; \infty)$

$$a=\frac{3x-1}{3x+1}=1-\frac{2}{3x+1}<1$$

Заметим, что на всей области определения неравенства (1) основание логарифма всегда меньше единицы ($a < 1$).

$$\log_a\left(x-\frac{1}{3}\right)\geq 1 \Rightarrow$$

$$\log_a\left(x-\frac{1}{3}\right)\geq \log_a a \Rightarrow$$

(4) $$\left(x-\frac{1}{3}\right)\leq a$$

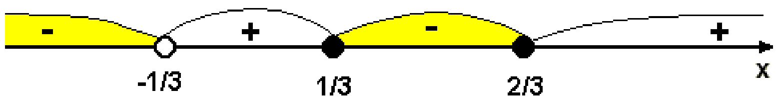
Поскольку при $a < 1$ логарифм в левой части неравенства (1) представляет собой убывающую функцию, то при переходе к аргументам логарифмов знак неравенства должен измениться на противоположный. Таким образом, задача свелась к решению простого алгебраического неравенства (4).

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)\leq \frac{3x-1}{3x+1}$$

Переносим все числа в левую часть неравенства (4) и приводим дроби к общему знаменателю. Получаем неравенство (5).

(5) $$\frac{(3x-1)\cdot(3x-2)}{3\cdot(3x+1)}\leq 0$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов на числовой оси x (см. рисунок).



Решению неравенства (5) на рисунке соответствуют желтые закрашенные области: $x\in (-\infty; -1/3) \cup [1/3; 2/3]$. Накладываем на это решение ОДЗ (3) $x\in (1/3; \infty)$ и находим ответ задачи как пересечение указанных интервалов.

О Т В Е Т : $x\in (1/3; 2/3]$.

Решение задачи №4.

Обозначим количество железной руды в тысячах тонн, добытой в первый год разработки за x_1, во второй год разработки – за x_2, в третий год за – x_3 и т.д. Допустим, что увеличение годовой добычи руды на 25% по сравнению с предыдущим годом происходило в течение n лет. После этого руда добывалась еще на протяжении трех лет с неизменной годовой выработкой, так что $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3}$. Таким образом, общее количество лет – искомая величина t, в течение которых разрабатывалось месторождение, определяется соотношением $t = n + 3$. Составим таблицу – отчет о количестве добытой руды.

год	**количество руды (тыс. тонн)**	**формула**	**прогрессия**
1	x_1	100	x_1
2	на 25% больше x_1	$x_1+0{,}25\cdot x_1$	$q\cdot x_1$
3	на 25% больше x_2	$x_2+0{,}25\cdot x_2$	$q^2\cdot x_1$
…	…	…	…
n	на 25% больше x_{n-1}	$x_{n-1}+0{,}25\cdot x_{n-1}$	$q^{n-1}\cdot x_1$
$n+1$	не изменялось	x_n	$q^{n-1}\cdot x_1$
$n+2$	не изменялось	x_n	$q^{n-1}\cdot x_1$
$n+3$	не изменялось	x_n	$q^{n-1}\cdot x_1$
ИТОГИ	850	$x_1+x_2+\ldots+x_{n+3}$	$S_n+3\cdot x_n$

Заметим, что ежегодный прирост в добыче на 25% по сравнению с предыдущим годом можно трактовать как ежегодное увеличение добычи руды в 1,25 раза. Следовательно, речь в задаче идет о геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1{,}25$. А суммарный общий объем добытой руды – есть сумма n членов геометрической прогрессии S_n плюс вклады трех последних лет, каждый из которых равен x_n. Воспользуемся известными формулами из теории геометрической прогрессии.

$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1} \qquad S_n = \frac{x_1\cdot(q^n-1)}{q-1} \qquad (1)$$

Получаем следующее уравнение: $S_n + 3\cdot x_n = 850$, или в развернутом виде:

$$\frac{x_1\cdot(q^n-1)}{q-1} + 3\cdot x_1\cdot q^{n-1} = 850. \qquad (2)$$

Подставляем значения $x_1 = 100$, $q = 1{,}25$ и решаем уравнение для n.

$$400\cdot(1{,}25^n-1)+300\cdot 1{,}25^{n-1}=850 \qquad (3)$$

$$400\cdot 1{,}25^{n} + 300\cdot 1{,}25^{n-1} = 850 + 400 = 1250 \tag{4}$$

$$1{,}25^{n-1}\cdot (400\cdot 1{,}25 + 300) = 1250 \tag{5}$$

$$1{,}25^{n-1}\cdot 800 = 1250 \tag{6}$$

$$1{,}25^{n-1} = 1250 / 800 = 1{,}5625 = 1{,}25^{2} \tag{7}$$

$$n - 1 = 2 \tag{8}$$

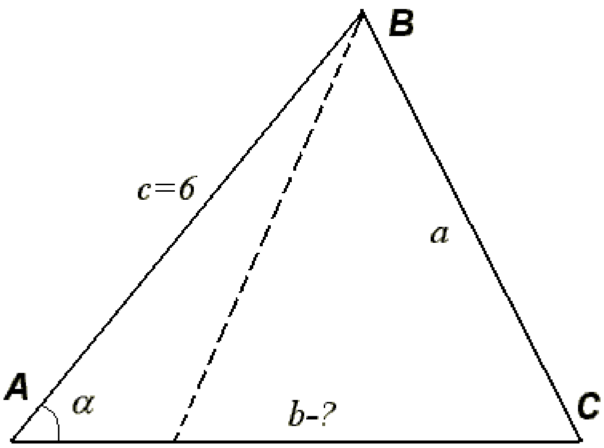
$$n = 3 \tag{9}$$

Теперь находим общее количество лет, в течение которых разрабатывалось месторождение: $t = n + 3 = 3 + 3 = 6$.

ОТВЕТ: $t = 6$ лет

Решение задачи №5.

Сделаем рисунок к задаче и введем простые обозначения $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $\angle BAC = \alpha = 30^{o}$, радиус описанной окружности обозначим буквой $R=5$. Первым шаг в решении задачи связан с использованием теоремы синусов для треугольника ABC и с нахождением стороны BC.



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Из теоремы синусов вычисляем $a = 2\cdot R\cdot \sin\alpha = 5$. Теперь воспользуемся теоремой косинусов и выразим сторону BC через AB и искомую сторону AC.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot bc\cdot \cos\alpha \tag{1}$$

Уравнение (1) можно рассматривать как квадратное уравнение для неизвестной переменной b. Решаем это уравнение через дискриминант.

$$b^2 - 2\cdot bc\cdot \cos\alpha + (c^2 - a^2) = 0 \tag{2}$$

$$D/4 = c^2\cos^2\alpha - (c^2 - a^2) = a^2 - c^2\sin^2\alpha = 25 - 9 = 16 \tag{3}$$

$$b_{1,2} = c\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\alpha} = 3\sqrt{3} \pm 4 \tag{4}$$

Таким образом, задача имеет два решения (см. пунктирную линию на рисунке).

ОТВЕТ $AC = 3\sqrt{3} \pm 4$.

Решение задачи №6.

$$x-2=\sqrt{-2(p+2)x+2} \qquad (1)$$

Решаем иррациональное уравнение с параметром p. Для этого возводим обе части уравнения (1) в квадрат.

$$(x-2)^2=-2(p+2)x+2 \qquad (2)$$

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые в уравнении (2).

$$x^2-4x+4=-2(p+2)x+2 \qquad (3)$$

Переносим все слагаемые в одну часть и получаем квадратное уравнение для x.

$$x^2+2px+2=0 \qquad (4)$$

Решаем квадратное уравнение (4) через дискриминант $D/4=p^2-2$ и находим корни при $p^2\geq 2$.

$$x_{1,2}=-p\mp\sqrt{p^2-2} \qquad (5)$$

Теперь следует отсечь побочные корни уравнения (4), приобретенные за счет возведения уравнения (1) в квадрат.

$$x-2\geq 0 \quad \text{или} \quad x\geq 2 \qquad (6)$$

Используем дополнительное условие, которому должны удовлетворять решения уравнения (1), вытекающее из неотрицательности арифметического корня в правой части формулы (1).

$$x_1=-p-\sqrt{p^2-2}\geq 2 \qquad (7)$$

Выясним, при каких значениях параметра p первый корень уравнения (4) является также и корнем уравнения (1).

$$\sqrt{p^2-2}\leq -p-2 \qquad (8)$$

Решаем для этого иррациональное неравенство, относительно параметра p.

$$\begin{cases}\left(\sqrt{p^2-2}\right)^2\leq(-p-2)^2\\ -p-2\geq 0\\ p^2-2\geq 0\end{cases} \qquad (9)$$

Стандартный метод решения данного неравенства состоит в возведении обеих частей в квадрат и наложении дополнительных условий на подкоренное выражение и правую часть неравенства (8), которая не может быть отрицательной.

$$\begin{cases}p^2-2\leq p^2+4p+4\\ p\leq -2\\ \left(p-\sqrt{2}\right)\left(p+\sqrt{2}\right)\geq 0\end{cases} \qquad (10)$$

$$\begin{cases}4p\geq -6\\ p\leq -2\\ \left(p-\sqrt{2}\right)\left(p+\sqrt{2}\right)\geq 0\end{cases} \qquad (11)$$

$$\begin{cases}p\geq -3/2\\ p\leq -2\\ \left(p-\sqrt{2}\right)\left(p+\sqrt{2}\right)\geq 0\end{cases} \qquad (12)$$

Из полученной системы видно, что первые два неравенства не имеют областей пересечения, следовательно, и вся система (12) не имеет решений. Таким образом, при любых значениях параметра p первый корень x_1 (7) не удовлетворяет дополнительному условию (6), т.е. является побочным.

$$x_2 = -p + \sqrt{p^2 - 2} \geq 2 \qquad (13)$$

Теперь выясним, при каких значениях параметра p второй корень уравнения (4) является и решением уравнения (1).

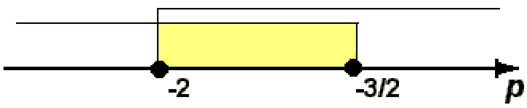
$$\sqrt{p^2 - 2} \geq p + 2 \qquad (14)$$

Для этого необходимо решить иррациональное неравенство (14), которое, в свою очередь, распадается на две системы неравенств (15) или (16).

$$\begin{cases} \left(\sqrt{p^2 - 2}\right)^2 \geq (p+2)^2 \\ p + 2 \geq 0 \end{cases} \qquad (15) \qquad\qquad \begin{cases} p^2 - 2 \geq 0 \\ p + 2 < 0 \end{cases} \qquad (16)$$

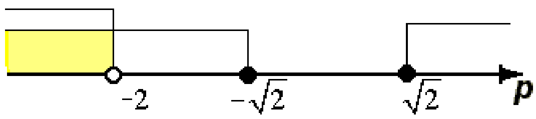
$$\begin{cases} p^2 - 2 \geq p^2 + 4p + 4 \\ p \geq -2 \end{cases} \qquad (15.1) \qquad\qquad \begin{cases} \left(p - \sqrt{2}\right)\left(p + \sqrt{2}\right) \geq 0 \\ p < -2 \end{cases} \qquad (16.1)$$

$$\begin{cases} p \leq -3/2 \\ p \geq -2 \end{cases} \qquad (15.2) \qquad\qquad \begin{cases} p \leq -\sqrt{2} \cup p \geq \sqrt{2} \\ p < -2 \end{cases} \qquad (16.2)$$



Решение системы (15):

$$p \in [-2; -3/2] \qquad (15.3)$$



Решение системы (16):

$$p \in (-\infty; -2) \qquad (16.3)$$

Решение иррационального неравенства (14) представляет собой объединение решений систем неравенств (14) и (15), которое можно записать в следующем виде:

$$p \in (-\infty; -3/2]. \qquad (17)$$

Следовательно, второй корень уравнения (4) x_2 (13) удовлетворяет дополнительному условию (6) только в области (17) и только в этой области он является истинным корнем уравнения (1).

Таким образом, уравнение (1) имеет единственное решение

$x = -p + \sqrt{p^2 - 2}$ при значениях параметра $p \leq -3/2$.

ОТВЕТ: $p \in (-\infty; -3/2]$.

©Web-Tutor: **Качественное и быстрое решение задач любой сложности:**
http://Web-tutor.narod.ru